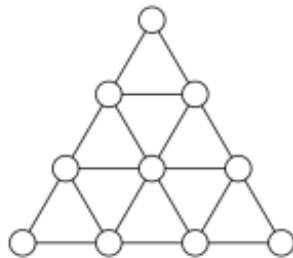


Петнаеста српска математичка олимпијада 2023. године

1. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) конструисана је симетрала BD ($D \in AC$) унутрашњег угла код темена B . Права нормална на BD , која садржи центар O описане кружнице троугла ABC , сече страну BC у тачки E . Права која садржи тачку E , паралелна са BD , сече страну AC у тачки F . Доказати да важи $CE = DF$.
2. У десет кружића са слике уписани су природни бројеви од 1 до 10. Затим је у сваком од девет малих троуглова чија су темена ти кружићи уписан збир бројева у њиховим теменима. Одредити највећи могући природан број n тако да, при произвољном распореду бројева, увек постоје три троугла таква да збир три броја који су уписани унутар њих износи бар n .



3. Нека су a, b, c реални бројеви који припадају сегменту $[0, 1]$ и задовољавају услов $ab + bc + ca = 1$. Одредити најмању и највећу могућу вредност израза $a^3 + b^3 + c^3$.
4. Одредити све уређене тројке (k, m, n) природних бројева, при чему је m прост, за које важе следећи услови:
 - (1) kn је квадрат природног броја;
 - (2) $\frac{k(k-1)}{2} + n$ је четврти степен простог броја;
 - (3) $k - m^2 = p$, где је p прост број;
 - (4) $\frac{n+2}{m^2} = p^4$.