Петнаеста српска математичка олимпијада 2022. године

1. Доказати да за све позитивне реалне бројеве a, b важи неједнакост

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2ab}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}.$$

Када важи једнакост у овој неједнакости?

2. Нека је I центар уписане кружнице, а A_1 и B_1 редом средишта страница BC и AC датог троугла ABC. Означимо са M и N редом средишта оних лукова AC и BC описане кружнице троугла ABC који садрже преостало теме троугла. Уколико су тачке M, I, N колинеарне, доказати да важи

$$\measuredangle AIB_1 = \measuredangle BIA_1 = 90^\circ.$$

3. Одредити све природне бројеве n који задовољавају следећих 5 услова:

(1) Број n није дељив ниједним квадратом природног броја већег од 1.

(2) Број n има само један прост делилац облика $4k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(3) Ако са $S(n)$ означимо збир цифара броја n, а са $d(n)$ број природних делилаца броја n, тада важи $S(n)+2=d(n)$.

(4) Број n увећан за 3 је квадрат природног броја.

(5) Број n нема просте факторе који имају 4 или више цифара.

4. У свако поље табле 5×5 уписан је број 0. У једном кораку дозвољено је одабрати произвољно поље табле и увећати за 1 бројеве уписане у том пољу и свим њему суседним пољима (два поља су суседна уколико имају заједничку ивицу). Након коначно много корака, у свим пољима табле уписан је природан број n. Одредити све могуће вредности за n.