Петнаеста српска математичка олимпијада 2021. године

1. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c важи неједнакост:

$$\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1} \geqslant \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Када важи једнакост у овој неједнакости?

2. Решити следећу једначину у скупу природних бројева:

$$x^2 = 2^y + 2021^z.$$

3. Два играча играју следећу игру: наизменично у темена $n-$тоугла уписују бројеве 0 или 1. Први играч започиње игру и побеђује ако након неког од његових потеза постоји троугао, који чине три узастопна темена $n-$тоугла, такав да је збир уписаних бројева у његовим теменима дељив са 3. Други играч побеђује ако успе то да спречи. Одредити који играч има победничку стратегију, уколико је:
(а) $n = 2019$; (б) $n = 2020$; (в) $n = 2021$.

4. На страницама AB и AC оштроуглог троугла ABC, са ортоцентром H и центром описане кружнице O, одабране су редом тачке P и Q такве да је $APHQ$ паралелограм. Доказати да важи:

$$\frac{PB \cdot PQ}{QA \cdot QO} = 2.$$