

Четрнаеста српска математичка олимпијада 2020. године

1. Нека је D произвољна тачка на страници AB троугла ABC , чији је центар уписане кружнице I . Тачке P и Q су пресеци симетрале дужи AB и полуправих AI и BI , редом. Кружница описана око троугла ADP сече дуж AC у тачки E , различитој од A . Кружница описана око троугла BDQ сече дуж BC у тачки F , различитој од B . Означимо са K пресечну тачку ових кружница, различиту од D . Доказати да тачке E, F, K, I припадају једној кружници.

2. Решити у скупу природних бројева једначину

$$x^{100} - y^{100} = 100!.$$

3. Реални бројеви a_1, a_2, \dots, a_{101} сви припадају сегменту $[-2, 10]$ и њихов збир је 0. Доказати да је њихов збир квадрата мањи од 2020.

4. Сто тенисера је учествовало на турниру где су играли свако са сваким по тачно једну партију, при чему нема нерешених резултата. На крају турнира је формирана табела по броју победа. Један тенисер је турнир завршио на k -том месту и једини је са тим бројем победа, при чему се истакао занимљивом чињеницом: победио је сваког тенисера који је пласиран боље на табели и изгубио од свакога ко је пласиран слабије од њега на табели. Колика може бити најмања вредност броја k , тј. која је најбоља позиција на табели коју је овај тенисер могао да освоји?