

Тринаеста српска математичка олимпијада 2019. године

1. Да ли постоји природан број n , такав да је укупан број делилаца броја $n!$ у скупу природних бројева дељив са 2019?
2. Доказати да за произвољне бројеве a, b, c из интервала $(0, 1)$ важи неједнакост

$$a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + 2\sqrt{abc}.$$

3. Подударне кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B . Нека је P произвољна тачка лука AB кружнице k_2 који је садржан унутар кружнице k_1 и нека права AP сече k_1 још у тачки C , а полуправа CB сече k_2 још у тачки D . Нека симетрала угла CAD сече кружницу k_1 још у тачки E , а кружницу k_2 још у тачки F , а полуправа FB сече k_1 још у тачки Q . Ако је X једна од пресечних тачака кружница описаних око троуглова CDP и EQF , доказати да је троугао CFX једнакостраничан.
4. На столу се налазе новчанице различитих вредности: 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 динара (број новчаница сваке од вредности може бити било који природан број или нула). Два играча, Први и Други, наизменично вуку следеће потезе (игру почиње Први). Једним потезом играч може да узме било коју новчаницу вредности веће од 1 динар и да је замени новчаницама мањих вредности у истом укупном износу. Губи играч који не може да повуче потез. Који играч има победничку стратегију?