

# Дванаеста српска математичка олимпијада 2018. године

1. Нека је  $M$  произвољна тачка која припада одсечку  $AD$  симетрале унутрашњег угла троугла  $ABC$  ( $D \in BC$ ). Права паралелна са  $BC$  која садржи тачку  $M$  сече страницу  $AB$  у тачки  $N$ . Означимо друге пресечне тачке правих  $AM$  и  $CM$  са описаном кружницом троугла  $ABC$  са  $K$  и  $L$ , редом. Доказати да су тачке  $K$ ,  $N$  и  $L$  колинеарне.

2. Доказати да за произвољне позитивне реалне бројеве  $a, b, c$  важи неједнакост

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c} + \frac{\sqrt{bc}}{2a+b+c} + \frac{\sqrt{ca}}{a+2b+c} \leq \frac{3}{4}.$$

3. Решити једначину

$$2^x - 3^y 5^z = 1009$$

у скупу природних бројева.

4. Два играча играју на табли  $2018 \times 2018$ . Они наизменично постављају по један жетон на поља табле. Први има за циљ да постави своје жетоне на

(а) четири;      (б) пет

узастопних поља у једној врсти или једној колони. Да ли други играч може да га спречи у томе?