Једанаеста српска математичка олимпијада 2017. године

1. Означено је неких 15 поља шаховске табле. Посматрају се све дужи са крајевима у центрима означених поља. Доказати да међу тим дужима постоје четири једнаке дужине.

2. Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y, z важи неједнакост

$$(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)(xy + yz + zx) \geqslant 3(x + y + z)^2x^2y^2z^2.$$

3. У оштроуглом троуглу ABC са međусобно различитим страницама, угао код темена C износи 60°. Нека су A' и B', редом, подножја висина из темена A и B, а T тежиште троугла ABC. Полуправе $A'T$ и $B'T$ секу описану кружницу датог троугла редом у тачкама M и N. Доказати да је $MN = AB$.

4. За природан број q казаћемо да је K*-наследник* природног броја n ако постоји природан број p такав да је $n + p^2 = q^2$. Нека је A скуп свих природних бројева n који имају бар једног K-наследника али ниједан од K-наследника броја n нема свог K-наследника. Доказати да је

$$A = \{7, 12\} \cup \{\, 8m + 3 \mid m \in \mathbf{N} \cup \{0\} \,\} \cup \{16m + 4 \mid m \in \mathbf{N}\,\}.$$