

Десета српска математичка олимпијада 2016. године

1. Дат је троугао ABC са правим углом код темена C . Нека је D подножје висине троугла из темена C , а k кружница која додирује дуж BD у тачки E , дуж CD у тачки F и описану кружницу троугла ABC у тачки G .
 - (а) Доказати да су тачке A , F и G колинеарне.
 - (б) Изразити полупречник кружнице k у зависности од дужина странаца датог троугла ABC .
2. Одредити минимални број делилаца који у скупу природних бројева може имати број облика $|2016^m - 36^n|$, где су m и n природни бројеви.
3. У два суседна поља (димензија 1×1) квадратне табле 10×10 налази се благо. Перица треба да погоди која су то поља. Једним потезом он може да изабере неко поље табле и да добије информацију да ли се у њему налази благо или не. Одредити минимални број потеза који је, уз одговарајућу стратегију, увек довољан да Перица са сигурношћу одреди поља у којима се благо налази.
4. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}} + \frac{2b}{\sqrt{3b+c}} + \frac{2c}{\sqrt{3c+a}} \leq \sqrt{3(a+b+c)}.$$