

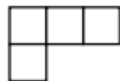
ЧЕТВРТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА 2010. ГОДИНЕ

1. Нека су тачке E и F подножја висина из темена B и C троугла ABC . Тачка M је подножје нормале из тачке F на страну BC , а тачка N је подножје нормале из тачке B на праву EF . Докажи да су праве AC и MN паралелне.

2. Нека су x и y бројеви из интервала $[1, 2]$. Докажи да је

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{9}{2}.$$

3. Одреди просте бројеве p за које је $2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5$ дељиво са 13.

4. Табла димензија 7×7 је покривена L фигурама састављеним од 4 једнака квадрата, тако да је тачно једно поље остало непокривено. Одреди сва поља табле која могу остати непокривена. 

1. Нађи све троцифрене природне бројеве $A < 500$ који имају следеће својство: „Ако се један иза другог испишу бројеви A , $2A$ и A , добије се деветоцифрени број који је потпун квадрат и који има тачно 4 различита проста делиоца.“

2. Докажи следећу неједнакост за све позитивне реалне бројеве a , b и c :

$$\frac{a^2 + 2b^2 + 4c^2}{bc} + \frac{b^2 + 2c^2 + 4a^2}{ac} + \frac{c^2 + 2a^2 + 4b^2}{ab} \geq 21.$$

Када важи знак једнакости?

3. На табли је написано 2010 природних бројева и један од њих је број 2011. Познато је, такође, да је за свака два написана броја на табли написана и апсолутна вредност њихове разлике. Докажи да су сви бројеви написани на табли дељиви са 2011.

4. На страници BC троугла ABC изабрана је тачка M тако да тежиште троугла ABM припада кружници описаној око троугла ACM , а тежиште троугла ACM припада кружници описаној око троугла ABM . Доказати да су тежишне дужи из темена M , троуглова ABM и ACM , једнаке.