

# Трећа српска математичка олимпијада 2009. године

1. Дати су природни бројеви  $a$ ,  $b$  и  $n$  такви да је  $a^2 + 2nb^2$  потпун квадрат. Докажи да се број  $a^2 + nb^2$  може приказати као збир квадрата два природна броја.

2. У једнакокрано-правоуглом троуглу  $ABC$  уписана је кружница. Нека је  $CD$  висина на хипотенузу ( $D \in AB$ ), и нека је  $P$  пресек (други) уписане кружнице и висине  $CD$ . У ком односу кружница дели дуж  $AP$ ?

3. На сваком пољу табле димензије  $n \times n$  ( $n \geq 2$ ) налази се по један жетон. У једном кораку померамо сваки жетон на једно њему суседно дијагонално поље. После неког корака на једном пољу може се налазити више жетона. Одреди најмањи број поља на која се могу поставити сви жетони после неког броја померања.

4. У запису 2009-цифреног природног броја појављују се само цифре 5 и 8. Докажи да се изостављањем само једне цифре може добити 2008-цифрен број дељив са 11.

5. Одреди све двоцифрене бројеве  $\overline{AB}$ , такве да  $\overline{AB}$  дели  $\overline{A0B}$ .

6. Из скупа  $\{1, 2, 3, \dots, 2009\}$  изабрано је 1005 бројева, тако да збир никоја два није 2009 ни 2010. Одреди све начине на које је могуће изабрати тих 1005 бројева.

7. Нека је  $ABCD$  конвексан четвороугао, такав да је  
 $\angle CBD = 2 \cdot \angle ADB$ ,  $\angle ABD = 2 \cdot \angle CDB$  и  $AB = CB$ .

Докажи да је четвороугао  $ABCD$  делтоид.

8. За позитивне реалне бројеве  $x, y, z$  важи

$$\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Докажи неједнакост

$$\frac{1}{x^3 + 2} + \frac{1}{y^3 + 2} + \frac{1}{z^3 + 2} < \frac{1}{3}.$$