Друга српска математичка олимпијада 2008. године

548. У троуглу ABC је $\measuredangle A = 120^\circ$, $AB = 3$ и $AC = 6$. Симетрала угла A сече страницу BC у тачки D. Одреди дужину дужи AD.

549. Одреди најмањи збир цифара броја облика $3n^2 + n + 1$ за $n \in \mathbf{N}$.

550. Из квадрата 100×100 исечена су четири поља која образују квадрат 2×2.

а) Доказати да се преостали део не може поплочати правоугаоницима 1×3 (сваки правоугаоник прекрива три поља) ако је квадрат 2×2 исечен у једном углу квадрата 100×100.

б) Доказати да је поплочавање могуће ако је квадрат 2×2 исечен из центра квадрата 100×100.

551. Одреди све уређене четворке (x, y, z, t) природних бројева x, y, z и t тако да је

$$x + y = zt, \qquad z + t = xy.$$

552. Бројеве 1, 2, ... , 2008 распоредимо на 1004 домине, тако да се на свакој домини налазе тачно два броја. Ако производе бројева на доминама означимо са p_1, p_2, ... , p_{1004}, доказати неједнакост

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{1004}} \leqslant \frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \cdots + \frac{1}{2008}.$$

553. У троуглу ABC страница BC је најмања. На страницама AB и AC дате су редом тачке D и E такве да је $BD = CE = BC$. Доказати да је полупречник круга описаног око троугла ADE једнак растојању између центра круга описаног око троугла ABC и центра круга уписаног у троугао ABC.