Прва српска математичка олимпијада 2007. године

1. ДАН

1. У унутрашњој области паралелограма $ABCD$ дата је тачка P таква да је $\measuredangle ADP = \measuredangle ABP$ и да је $\measuredangle DCP = 30^\circ$. Одредити меру $\measuredangle DAP$.

2. На једној прослави било је укупно 2007 особа. За сваке 1003 од тих особа постојала је бар једна особа од преосталих присутних која се познавала са сваком од тих 1003 особе. Доказати да је на прослави постојала особа која се познавала са свим присутним особама.

3. За позитивне реалне бројеве x, y и z важи да је $xyz = 1$. Доказати да је:
$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}\leq 1.$$

2. ДАН

1. Поља таблице димензије 3×3 попуњена су бројевима -1 и 1. У сваком кораку истовремено се у свако поље таблице упише производ свих бројева који су у пољима која са тим пољем имају заједничку ивицу. Да ли се, независно од тога који су бројеви били у пољима таблице на почетку, овим поступком може добити да у свим пољима таблице буде број 1?

2. Наћи највећи природан број k такав да постоји број облика $1!+2!+\ldots+n!$ $(n\in\mathbb{N})$ чији је делитељ број 3^k. (Напомена: $m! = m\cdot(m-1)\cdots 2\cdot 1$)

3. Тачке D, E и F припадају редом страницама AB, BC и CA оштроуглог троугла ABC, при чему дужине дужи AE, BF и CD нису дуже од $\sqrt{3}\ cm$. Доказати да површина троугла ABC није већа од $\sqrt{3}\ cm^2$.