

# Државно такмичење из математике

## седми разред:

2014.

1. Одреди све реалне бројеве  $x$ ,  $y$  и  $z$  такве да важи:

$$xy + yz + zx = 2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1}.$$

2. Нека је  $O$  центар описане кружнице око правилног петоугла  $ABCDE$ . Докажи да кружница описана око троугла  $ABO$ , осим тачака  $A$  и  $B$ , садржи тачке пресека још двају парова дијагонала петоугла.
3. На једном тестирању 67 ученика решавало је 6 задатака. Сви ученици су дали одговор на сваки задатак. Одговори на сва питања су ДА или НЕ. За тачно решен задатак под редним бројем  $k$  ( $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ) ученик добија  $k$  поена, а за нетачно решен задатак одузима му се  $k$  поена.
- а) Докажи да је бар четворо ученика остварило исти број поена на тестирању.
- б) Докажи да је бар двоје ученика имало исте одговоре на сваком од шест задатака.
4. На крацима  $AB$  и  $AC$  једнакокраког троугла  $ABC$  означене су редом тачке  $K$  и  $L$  тако да је  $AK = CL$  и  $\sphericalangle ALK + \sphericalangle LKB = 60^\circ$ . Докажи да је  $KL = BC$ .
5. На две клупе седи по шесторо деце. Сви имају различит број година и број година сваког детета је цео број. Збир и производ броја година деце са једне клупе једнак је збиру, односно производу броја година деце са друге клупе. Најстарије дете има 16 година. Колико година имају деца која седе на истој клупи са њим?