Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Четврти разред - Б категорија

1. Познато је да полином $P(x) = x^4 - x^3 + px^2 + qx + r$, са реалним коефицијентима, има нуле $x_1 = 3$ и $x_2 = 1 + 2i$. Одредити коефицијенте p, q и r тог полинома, као и све остале његове нуле.

2. За које природне бројеве n, који имају тачно девет природних делилаца, можемо попунити магични квадрат димензија 3×3 са логаритмима њихових делилаца (код магичног квардрата збирови бројева у свакој врсти, у свакој колони, као и на дијагоналама су једнаки)?

3. Новак Ђоковић (Србија) и Роџер Федерер (Швајцарска) су једини играчи у опен ери који имају преко 60 победа на сва четири гренд слем турнира. Играли су укупно 50 пута, а Ђоковић води са $27 : 23$ (плус, предаја Федерера у финалу завршног мастерса 2014. године). У једном од најпознатијих њихових мечева, у полуфиналу турнира УС Опен-2010, Ђоковић је добио са 3:2 у сетовима, тј. у гемовима 5:7, 6:1, 5:7, 6:2, 7:5. На колико различитих начина, у складу са правилима тениса, су могли да дођу до истог овог резултата по гемовима? Ако је N добијени број начина, колико целобројних делилаца има број N?

4. Нека је k кружница полупречника $R > 0$ и A тачка у равни кружнице k, која је од њеног центра на растојању једнаком $2R$. На кружници k уочене су различите тачке B и C, такве да је $AB = AC$. Доказати да је површина троугла ABC не већа од $\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt[4]{12}}{4}R^2$.

5. Дат је троугао ABC. Нека је O средиште описане кружнице k троугла ABC, а S тачка на симетрали странице AB тог троугла. Ако су C и T пресечне тачке кружнице k и праве симетричне правој CS у односу на симетралу угла ACB, доказати да тачке C, O, S и T леже на једној кружници.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.