

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Четврти разред - А категорија

- Наћи све функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такве да важи $f(a) + f(b) \mid af(a) - b^2$, за било која два природна броја a и b .
- Одредити све тројке $(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ природних бројева за које важи $10^a + 2^b = 2024^c$.
- Нека су x и y реални бројеви за које важи $\sin x + \cos x = y$ и $\sin y + \cos y = x$. Доказати да је $x > \frac{5}{4}$.
- Дат је оштроугли троугао ABC . Нека је D тачка на правој BC . Симетрала спољашњег угла у темену A тог троугла сече праву BC у тачки E . Означимо са M средиште описане кружнице око троугла ADE , а са ω_1 и ω_2 кружнице описане око троуглова ABD и ACD . Доказати да се заједничке тангенте кружница ω_1 и ω_2 секу у тачки M .
- Нека је $n \geq 2$ природан број. На планети ДМС2024 обитава тачно n становника, матичних бројева $1, 2, \dots, n$, међу којима се неки познају, а неки не. Услед постојања паралелних универзума, постоји и планета ДМС2024', чији становници имају матичне бројеве $1', 2', \dots, n'$ и где су познанства супротна, односно за произвољне $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, становници i' и j' са ДМС2024' су познаници ако и само ако i и j са ДМС2024 то нису. Притом за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, становник i планете ДМС2024 познаје становника i' и само њега од становника планете ДМС2024'. За које вредности n је могуће да су познанства међу становницима обеју планета таква да се они сви могу распоредити за округли сто и то на тај начин да свако седи између својих познаника? Познанства су симетрична.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.