

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
2. март 2024.

Други разред - Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра p тако да једначина $|x^2 - px - 2p + 1| = p - 1$ има 4 реална и различита решења x_1, x_2, x_3 и x_4 , за која важи $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20$.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{x + 2023} + \sqrt[3]{x + 2024} + \sqrt[3]{x + 2025} = 0.$$

3. У троуглу ABC важи $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle BCA$ и $2\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA$. Симетрала унутрашњег угла у темену C тог троугла сече праву AB у тачки E . Нека је F средиште дужи AE и нека је AD висина из темена A троугла ABC . Ако симетрала дужи DF сече праву AC у тачки M , доказати да је $AM = CM$.

4. Одредити све тројке целих бројева $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ за које важи $x^y - 2^z = 1$.

5. На табли је записан низ нула и јединица. Познато је да међу сваких 200 узастопних чланова низа се налази једнако нула и јединица, али међу сваких 202 узастопних чланова низа број нула и јединица није једнак. Колико највише чланова може имати овај низ?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.