

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
2. март 2024.

Трећи разред - Б категорија

1. У зависности од реалног параметра  $a \in (-\pi, \pi)$  дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned}x + \cos a \cdot y + z &= 1 \\x + y + \cos a \cdot z &= 1 \\x + \cos^2 a \cdot y + z &= \cos a.\end{aligned}$$

2. Нека је  $a = \log_2 5$  и  $b = \log_{14} 98$ . Доказати да је

$$\log_{28} 490 = \frac{2a + b - ab}{3 - b}.$$

3. Нека су  $a$  и  $b$  произвољни природни бројеви. Одредити најмању могућу вредност израза  $I(a, b) = |20^a - 23^b|$ .

4. Дата је коцка  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  чија је ивица дужине 1. Тачка  $K$  на ивици  $AB$  дате коцке изабрана је тако да је угао између праве  $A_1 B$  и равни  $B_1 C K$  једнак  $60^\circ$ .

(а) Одредити запремину пирамиде  $K B C B_1$ .

(б) Одредити  $\operatorname{tg} \alpha$ , где је  $\alpha$  угао који заклапају равни  $B_1 C K$  и  $ABC$ .

5. Посматрајмо 5 међусобно различитих целих бројева и апсолутне разлике свих 10 парова тих бројева (наравно, неке од ових разлика могу бити међусобно једнаке). Одредити највећи природан број за који са сигурношћу можемо тврдити да ће делити производ ових разлика, без обзира на то којих смо 5 бројева на почетку посматрали.

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.  
Решења задатака детаљно образложити.