Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Трећи разред - А категорија

1. У магични квадрат (суме бројева по врстама, по колонама и по обе дијагонале су једнаке) димензија 3×3 записано је девет различитих целих бројева. Нека је S сума свих тих бројева и нека је D вредност детерминанте матрице 3×3, која има исте елементе као и задати магични квадрат. Доказати да је број $D : S$ цео, за $S \neq 0$.

2. На табли је у почетку записан полином $P(x) = x^{2024} + x^{2023} + x^{2022} + ... + x + 1$. Аца и Бранко, наизменично, бришу један сабирак из полинома који се тог тренутка налази на табли. Игру губи играч након чијег потеза се на табли налази полином који има барем једну реалну нулу. Уколико су избрисани сви сабирци, тада сматрамо да је на табли написан нула полином. Ако Аца игра први, који од играча има победничку стратегију?

3. На страници BC троугла ABC уочена је тачка D. Тачке E и F су изабране на правој BC тако да је $BE = BD$ и $CF = CD$. Кружнице описане око троуглова ACE и ABF секу се, по други пут, у тачки G. Нека кружница описана око троугла AEF сече праву AD, поново, у тачки H. Доказати да је $DG = GH$.

4. Квадратна табла странице n, $n \geqslant 2$, подељења је на n^2 јединичних поља. Обојено је $2n-3$ поља табле, али тако да ниједна врста нити колона нису потпуно обојене. Доказати да је могуће изабрати n необојених поља, таквих да никоја два од њих нису у истој врсти или колони.

5. Низ (a_n), $n \in \mathbb{N}$, задат је са $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Одредити остатак при дељењу броја a_{2024} са 2024.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.