

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
2. март 2024.

Други разред - А категорија

1. Претпоставимо да постоји група људи за коју важи да сваки појединац из те групе има тачно 3 пријатеља међу осталим члановима те групе. Познато је да сваке две особе које се не познају имају тачно једног заједничког пријатеља из групе. Колико највише људи може имати поменута група?
2. Дата је квадратна функција  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где је коефицијент  $a$  природан број, а коефицијенти  $b$  и  $c$  су цели бројеви. Ако функција  $f$  има две различите нуле у интервалу  $(0, 1)$ , доказати да тада мора бити  $a \geq 5$ . Дати пример такве функције за коју је  $a = 5$ .
3. Нека су  $AB$  и  $CD$  две различите тетиве кружнице  $k = k(O, R)$ , које немају заједничку тачку, при чему је  $O$  средиште и  $R > 0$  полурпречник кружнице  $k$ . Мањи лукови  $AB$  и  $CD$ , пресликани су осносиметрично, редом, у односу на тетиве  $AB$  и  $CD$ . Испоставило се да се слике тих лукова након поменутог пресликавања додирују. Доказати да је  $AB^2 + CD^2 > 4R^2$ .
4. Наћи све парове целих бројева  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  за које важи  $2024^x + 1 = y^2$ .
5. На табли је написан природан број  $n > 1$ . Ана и Бобан играју следећу игру, при чему Ана игра прва и оба играча потезе вуку наизменично. У сваком потезу играч који је на потезу бира делилац броја написаног на табли, који је већи од 1 и који није дељив квадратом неког природног броја већег од 1. Затим, број са табле подели одабраним делиоцем, на табли запише резултат, а стари број обрише са табле. Када на табли остане број 1, играч који је на потезу је изгубио. У зависности од броја  $n$  одредити ко од играча има победничку стратегију.

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.  
Решења задатака детаљно образложити.