Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Први разред - А категорија

1. Бинарна релација ϱ дефинисана је на следећи начин:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad x^2 - 3xy + 2y^2 = 0.$$

(а) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна?
(б) Испитати да ли је ϱ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{R}$. Ако јесте, наћи класе еквиваленције елемената 0, 1, 2 и 6.
(в) Испитати да ли је ϱ релација поретка на скупу $\mathbb{R}$, као и да ли је релација тоталног на истом скупу.

2. Наћи све реалне бројеве r за које постоји тачно један реалан број a такав да полином $p(x) = (x + a)(x^2 + rx + 1)$ има све ненегативне коефицијенте.

3. Наћи све просте бројеве p, q и r такве да је број

$$p^{q+r} + q^{p+r} + r^{q+p}$$

квадрат непарног природног броја.

4. Нека је $k \geqslant 2$ природан број. Маргита је на табли написала првих $2k - 1$ природних бројева $1, 2, \ldots, 2k - 1$. У једном потезу она може да обрише произвољна два броја са табле и на истој напише збир и производ обрисаних бројева. Да ли је могуће да Маргита своје потезе одигра тако да на табли на крају остане тачно k појављивања броја n, где је $n \geqslant 2k + 1$ задат непаран природан број?

5. На страници BC троугла ABC уочена је тачка D. Тачке E и F, које су различите од тачке D, су изабране на правој BC тако да је $BE = BD$ и $CF = CD$. Кружнице описане око троуглова ACE и ABF секу се, по други пут, у тачки G. Означимо са H средиште кружнице описане око троугла EGF. Доказати да је средиште дужи DH уједно и средиште описане кружнице око троугла ABC.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.