

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

4. март 2023.

Четврти разред - А категорија

1. Дат је неконстантан иредуцибилиан полином $P \in \mathbb{Q}[x]$. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је $P(a) = P(b) = 0$ и $a - b \in \mathbb{Q}$. Доказати да је $a = b$.

Напомена: За полином $P \in \mathbb{Q}[x]$ кажемо да је иредуцибилиан ако се не може представити као производ два неконстантна полинома из $\mathbb{Q}[x]$.

2. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека су E и F тачке додира уписане кружнице троугла ABD са страницама AD и AB , редом, а G и H тачке додира уписане кружнице троугла BCD са страницама BC и CD , редом. Доказати да се праве EF , GH и BD секу у једној тачки или су све паралелне ако и само ако је четвороугао $ABCD$ тангентан.

3. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такве да важи

$$f(m) + f(n) \mid m! + n!,$$

за све природне бројеве m и n .

4. (а) Колико постоји низова подскупова A_1, A_2, \dots, A_{100} и A_{101} скупа $\{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ тако да за свако $i \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ важи $|A_i \Delta A_{i+1}| = 101$?
(б) Колико има таквих низова подскупова за које додатно важи и $|A_{101} \Delta A_1| = 101$?

5. Дата је функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ таква да за свака два различита природна броја $a, b \in \mathbb{N}$, таква да $a \mid b$, важи $f(a) < f(b)$. Да ли f мора бити неопадајућа?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.