

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
4. март 2023.

Трећи разред - А категорија

1. Уколико је  $AB = A$  и  $BA = B$ , доказати да су матрице  $A$  и  $B$  идемпотентне, тј. да је  $A^2 = A$  и  $B^2 = B$ .

2. Дат је троугао  $ABC$ . Нека су  $S$  и  $S_a$ , редом, средиште уписане кружнице и средиште споља приписане кружнице која одговара темену  $A$  тог троугла. Ако је  $D$  подножје висине из темена  $A$  и  $S'$  тачка симетрична тачки  $S$  у односу на праву  $BC$ , доказати да су тачке  $S_a$ ,  $S'$  и  $D$  колинеарне.

3. Да ли постоји бесконачно много природних бројева  $r$  таквих да постоје природни бројеви  $n, a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  такви да важи

$$n! = a_1! \cdot a_2! \cdot a_3! \cdot \dots \cdot a_r!?$$

4. Дато је  $k$  мушкараца и  $n$  жена међу којима постоје неки парови који су међусобно компатибилни, при чему је свака жена компатибилна са барем једним мушкарцем. Познато је да није могуће сваког мушкарца оженити са компатибилном женом, међутим, ако избацимо било ког мушкарца, ово постаје могуће за преостале. Доказати да је  $k = n + 1$ .

5. Одредити све функције  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  за које важи

$$f(y)f(x+y) + xf(x) + f(xy) = f(x+y)^2,$$

за свако  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.  
Решења задатака детаљно образложити.