

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
4. март 2023.

Други разред - А категорија

1. Наћи сва реална решења једначине

$$\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{4^2x + \sqrt{\dots + \sqrt{4^{2023}x + 3} - \sqrt{x}}}}} = 1.$$

2. Нека је тачка  $O$  средиште описане кружнице око троугла  $ABC$  у којем важи  $\sin \alpha \cos \beta = \sin \gamma \cos \gamma$ , где су  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , редом, величине унутрашњих углова у теменима  $A$ ,  $B$  и  $C$  тог троугла. Доказати да се права  $AO$ , права одређена тежишном дужи, која садржи тачку  $B$  тог троугла, и симетрала унутрашњег угла у темену  $C$  секу у једној тачки.

3. Наћи све парове природних бројева  $(x, y)$  такве да важи  $2^x + 11 = 3^y$ .

4. Дат је скуп  $S = \{1, 2, \dots, 2022\}$ . На колико се начина може одабрати  $k$ -точлани подскуп  $M$  скупа  $S$  ( $2 \leq k \leq 2022$ ) такав да у скупу  $M$  не постоје два елемента чији је збир једнак 2022, нити два чији је збир једнак 2023?

5. Нека за позитивне реалне бројеве  $a$ ,  $b$  и  $c$  важе једнакости

$$a^2 + ab + b^2 = 144, \quad b^2 + bc + c^2 = 25 \quad \text{и} \quad c^2 + ca + a^2 = 169.$$

Одредити вредност израза  $ab + bc + ca$ .

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.  
Решења задатака детаљно образложити.