Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

4. март 2023.

Први разред - А категорија

1. Нека је ϱ бинарна релација дефинисана на скупу $\mathbb{N}$ тако да за све $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists k \in A)\ x + 2y = 3k \cdot x.$$

У сваком од случајева:

(а) $A = \mathbb{N}$; (б) $A = \mathbb{T}$, где је $\mathbb{T}$ скуп непарних природних бројева; (в) $A = \mathbb{Q}$;

испитати да ли је релација ϱ релација поретка на скупу $\mathbb{N}$ и, у случају да јесте, испитати да ли је релација тоталног поретка. Такође, у сваком од случајева испитати да ли је релација ϱ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{N}$ и, ако јесте, одредити одговарајуће класе еквиваленције?

2. На страницама оштроуглог троугла ABC дате су тачке $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$ тако да је $\sphericalangle CC_1B = \sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BB_1A = \varphi$, где је φ оштар угао. Дужи AA_1, BB_1 и CC_1 секу се у тачкама M, N и P. Доказати да се ортоцентар троугла ABC поклапа са центром описаног круга троугла MNP.

3. Нека је S коначан подскуп скупа природних бројева такав да за свака два елемента x и y из скупа S важи да постоји $z \in S$ тако да $z \mid x - y$. Доказати да постоји елемент из скупа S који дели све остале елементе тог скупа. Да ли тврђење остаје на снази када је S коначан подскуп скупа целих бројева?

4. У једној основној школи свако од укупно 2023 ученика има један ормарић на којима су написани, редом, сви бројеви од 1 до 2023. Претпоставимо да су на почетку сви ормарићи затворени. Ученици те школе су одлучили да се поиграју, те да свако од њих оде и отвори/затвори поменуте ормариће. Први ученик полази и отвара, редом, све ормариће. За њим креће и други ученик и иде и затвара сваки други, тј. ормарић са парним бројем, итд. Ученик n иде до сваког n-тог ормарића и, ако је он отворен, затвори га, а, ако је затворен, онда га отвара. На крају, свих 2023 ученика приступило је процесу отварања/затварања ормарића.

(а) Након ове игре, колико је остало отворених ормарића?
(б) Колико је ормарића тачно два пута отворено и једном затворено?

5. Нека су $x, y \in \mathbb{R}$ такви да су $x + y$ и $x^2 + y$ рационални бројеви.

(а) Ако је и $x + y^2$ рационалан, морају ли x и y бити рационални?
(б) Ако је и $x^3 + y$ рационалан, морају ли x и y бити рационални?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.