

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Први разред - Б категорија

1. На табли су записани бројеви

$$1 \cdot \sqrt{2022}, 2 \cdot \sqrt{2021}, 3 \cdot \sqrt{2020}, \dots, 2020 \cdot \sqrt{3}, 2021 \cdot \sqrt{2}, 2022 \cdot \sqrt{1}.$$

Који од записаних бројева је највећи?

2. Да ли постоји цифра a таква да је број $\overbrace{20aa\dots aa}^{2020}21$ квадрат природног броја?

3. На страници EF правилног шестоугла $ABCDEF$ уочена је произвољна тачка X . Нека је AXY једнакостраничан троугао, при чему су тачке Y и F са различитих страна праве AX и BYZ једнакостраничан троугао, при чему су тачке Z и C са различитих страна праве BY . Доказати да се тачка Z налази на дужи AO , где је O центар описане кружнице шестоугла $ABCDEF$.

4. Милица зна да шифра на кофери њеног брата представља троцифрени број коме су све цифре у строго опадајућем редоследу. Ако је познато да ће Милица, приликом покушаја отварања братовљевог кофера, тестирати само различите цифре, јер је паметна, колико највише проба Милица мора учинити да би са сигурношћу отворила братовљев кофер?

5. Одредити све $x \in \mathbb{R}$ такве да је

$$|x - x^2| = 2|x^2 - x^3| = 3|x^3 - x^6| = 6|x^6 - x|.$$

Време за рад 240 минута.

Сваки задатак вреди 20 поена.

Решења задатака детаљно образложити.