

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Четврти разред - Б категорија

1. Дат је низ $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ са: $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = a_n + 4n + 3$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Изразити a_n у функцији од n , а затим, одредити и граничну вредност

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{4n}} + \sqrt{a_{4^2 n}} + \cdots + \sqrt{a_{4^{2022} n}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{2n}} + \sqrt{a_{2^2 n}} + \cdots + \sqrt{a_{2^{2022} n}}}.$$

2. У унутрашњости сфере уочена је тачка O . Кроз тачку O конструсане су три праве p, q и r . Права p продира сферу у тачкама A и B , права q у тачкама C и D , а права r продира сферу у тачкама E и F . Испоставило се да важи:

$$\{OA, OB, OC, OD, OE, OF\} \supset \{1, 5, 15, 17, 51\}.$$

Колико најмање може бити полупречник сфере?

3. Решити систем једначина у скупу природних бројева

$$\begin{aligned} ab + 2a - b &= 58 \\ bc + 4b + 2c &= 300 \\ cd - 6c + 4d &= 101. \end{aligned}$$

4. Путнички део авиона се састоји из n редова од по 6 седишта и пролаза који иде по средини сваког реда. Притом се у сваком тренутку највише један путник може налазити на неком седишту, највише један путник се може налазити у пролазу у линији с неким редом седишта и не може се налазити ни на једном другом месту. Сваки од $6n$ путника има карту с јединственим бројем седишта. Путници улазе највише један сваке секунде у авион тако да је прва позиција на коју закораче увек она у пролазу у линији првог реда, и притом им је за прелазак с једне на другу позицију потребна тачно 1 секунда (где су могући прелази између суседних позиција у реду и суседних позиција у пролазу међу седиштима). Које је при овим условима минимално време потребно да свих $6n$ путника седну на своје место?

5. Наћи све уређене тројке (n, m, p) , где су n и m цели, а p је прост број, за које важи

$$7^n - 3^n = p^2 \cdot 2^{mp}.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.