

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
25. март 2023.

Четврти разред - А категорија

1. Нека је \mathbb{C} скуп комплексних бројева. У скупу $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ решити једначину

$$(\operatorname{Im} z)^{\operatorname{Re} z} = e^{\frac{1}{2}(|z|^2 - z - \bar{z})}.$$

2. Дат је троугао ABC . Означимо са D, E и F , редом, тачке у којима уписана кружница унутар тог троугла, са центром у тачки S , додирује његове странице AB, BC и CA . Ако тежиште T троугла ABC припада правој DE , доказати да су тачке T, S и F колинеарне.

3. На табли је записан природан број n . Ана и Бојан играју следећу игру, наизменично вукући потезе. Потез се састоји од брисања написаног броја и замењивања истог са разликом тог броја и неког његовог делиоца који није 1, нити сам тај број (играч сам бира делилац). Ако Ана игра прва, у зависности од броја n , одредити који играч има победничку стратегију (игру губи онај играч који не може одиграти потез).

4. За конвексан четвороугао $ABCD$ кажемо да је леп ако дужине свих његових страница, дужина барем једне дијагонале и површина тог четвороугла имају целобројне вредности. Доказати да постоји бесконачно много лепих неподударних четвороуглова којима је дужина тачно једне странице прост број.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.