

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Други разред - Б категорија

1. Нека је $p > 2$ прост број и нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 - px + \frac{1}{3} = 0$. Доказати да је $x_1^3 + x_2^3$ природан број дељив са 24.

2. Да ли постоји цифра a таква да је број $\overline{20\underbrace{aa\dots aa}_{2022}21}$ куб природног броја?

3. Дат је троугао ABC и нека су на његовим страницама BC , CA и AB дате, редом, тачке D , E и F такве да се праве AD , BE и CF секу у једној тачки. Означимо ту пресечну тачку са X .

(а) Доказати да се кружнице описане око троуглова AFE , BDF и CED секу у једној тачки, коју ћемо означити са Y ;

(б) Доказати да је $X = Y$ ако и само ако су праве AD , BE и CF висине троугла ABC .

4. Познато је да квадратна једначина $x^2 + ax + b = 0$ има два реална и различита решења. Колико различитих реалних решења има једначина

$$x^4 + ax^3 + (b - 2)x^2 - ax + 1 = 0?$$

5. Након што је оставио отворен прозор, током неког времена, $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ мува је улетела у Милорадову собу и одомаћила се на његовом ноћном сточићу, чија је површина облика једнакостраничног троугла странице $n \in \mathbb{N}$. Ипак, Милорад поседује муварицу, чији врх има облик квадрата странице 1, и помоћу ње жели да се реши неочекиваних уљеза. Претпоставимо ли да је Милорад довољно брз и прецизан, те да може да зада ударац муварицом на било ком делу сточића и у тренутку у коме то жели, као и да су муве занемарљиво малих димензија, доказати да је Милорад у стању да, без обзира на њихов распоред на сточићу, уклони барем две муве једним ударцем.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.