

Министарство просвете Републике Србије  
Друштво математичара Србије  
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

22. април 2023.

Трећи разред - Б категорија

1. Нека су  $x$  и  $y$  оштри углови за које важи  $\sin x = \frac{3}{5}$  и  $\operatorname{tg} y = 5\sqrt{2} - 7$ . Доказати да је  $\frac{\pi - 4x}{4y}$  природан број.

2. На ивицама  $SA, SB$  и  $SC$  пирамиде  $SABC$  уочене су, редом, тачке  $A', B'$  и  $C'$  такве да је

$$\frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} = 1.$$

Доказати да је запремина пирамиде  $SA'B'C'$  барем 27 пута мања од запремине пирамиде  $SABC$ .

3. Одредити све вредности реалног параметра  $a$  за које једначина

$$\log_{ax}(3^x + 4^x) = \log_{(ax)^2}(7^2(4^x - 3^x)) + \log_{(ax)^3}8^{x-1}$$

има барем једно решење у скупу реалних бројева.

4. Дато је 12 тачака на кружници.

(а) На колико начина се могу изабрати две тетиве, са крајевима у датим тачкама, које имају тачно једну заједничку тачку?

(б) На колико начина се може изабрати троугао од тих тачака тако да се са обе стране сваке праве на којој лежи нека његова страница налази барем једна од преосталих тачака?

5. Милисав је замислио неки природан број  $n$ , те је на табли записао све делиоце тог броја који нису већи од  $\sqrt{n}$ . Алекса је уочио записане бројеве на табли и рекао да може да каже Милисаву коначан скуп неких бројева, такав да је број  $n$ , који је Милисав на почетку замислио, сигурно међу њима. Доказати да Алекса може да испуни свој циљ ако и само ако бројеви које је Милисав записао на табли не представљају скуп свих делилаца неког одређеног природног броја.

Време за рад 240 минута.

Сваки задатак вреди 20 поена.

Решења задатака детаљно образложити.