

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25. март 2023.

Други разред - А категорија

1. Означимо са \mathbb{Z} скуп свих целих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такве да за свака два цела броја a и b важи

$$f(a + f(b)) = b + f(a) + 1.$$

2. Нека су D , E и F подножја висина из темена A , B и C , редом, на праве одређене страницама троугла ABC . Означимо са H ортоцентар тог троугла. На дужима AD , BE и CF , редом, дате су тачке X , Y и Z такве да важи

$$\frac{AX}{XD} = \frac{BY}{YE} = \frac{CZ}{ZF} = 2.$$

Доказати да тачке H , X , Y и Z припадају једној кружници.

3. Наћи све природне бројеве x такве да је број $2^x + 100x + 1$ потпун квадрат.

4. У некој просторији се налази $n \geq 4$ људи. Познато је да важи следеће: у сваком скупу људи који садржи четири различите особе важи да је број парова људи који се познају међу тих четворо једнак 0, 3 или 4. За које n се из овог услова може закључити да постоји скуп величине барем $\frac{n}{2}$ тако да нико никог не зна?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.