

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25. март 2023.

Први разред - А категорија

1. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_{2023} \in \{-1, 0, 1, 2\}$ такви да важи

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} = 111 \quad \text{и} \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2023}^2 = 999.$$

Наћи највећу могућу вредност израза

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2023}^3.$$

2. Дат је троугао ABC . Нека је тачка D подножје висине из темена A на праву BC тог троугла и нека је ω је кружница конструисана над дужи AD као пречником. Означимо са G другу пресечну тачку кружнице ω и описане кружнице око троугла ABC . Права AG сече праву BC у тачки H . Доказати да ако кружнице описане око троуглова ABH и ACH , редом, секу кружницу ω и у тачкама I и J , онда тачка пресека правих BI и CJ припада ω .

3. Означимо са $f(n)$ најмањи заједнички садржалац бројева $1, 2, \dots, n$, где је n произвољан природан број. Наћи све природне бројеве n такве да је

$$f(n) < f(n+1) < f(n+2) < f(n+3).$$

4. Дат је природан број n . Колико највише топова можемо поставити на таблу димензија $n \times n$ тако да сваки топ напада највише 3 друга топа (напади између произвољна два топа одвијају се према шаховским правилима, тј. један топ напада другог ако се налазе у истој врсти/колони табле и ако се у тој врсти/колони између њих не налази нити један други топ)?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.