Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека је

$$x = \frac{(1+i)^{2022}}{(1-i)^{2010}}, \quad y = 3^{\log_9 25} \quad \text{и} \quad z = \frac{27 \arcsin \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}}.$$

Ако је $n = xyz$, одредити број делилаца броја n.

2. Одредити све природне бројеве n, такве да је број $n^2 + n + 2024$ дељив са 2022.

3. Одредити све $p \in \mathbb{R}$ за које једначина

$$8 + 4p(x-1) = \big(x - |x|\big)x$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

4. У тетраедру $SABC$ је $SA \perp SB$, а подножје нормале из S на раван ABC је ортоцентар $\triangle ABC$. Доказати да важи

$$\big(AB + BC + CA\big)^2 \leqslant 6 \cdot \big(AS^2 + BS^2 + CS^2\big).$$

5. Бројеви од 1 до 8 уписани су у темена осмоугла $A_1A_2\ldots A_8$ (сваки број у једно теме и у свако теме један број) и за сваку страницу осмоугла и дијагонале A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 и A_4A_8 је израчунат збир бројева уписаних у крајевима те дужи. Нека је m најмањи од добијених бројева.

(а) Одредити највећу могућу вредност броја m.

(б) Одредити укупан број начина на који се бројеви од 1 до 8 могу уписати у темена осмоугла, тако да вредност броја m буде вредност одређена у делу (а).

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.