

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Четврти разред – А категорија

1. Александра и Бојан играју следећу игру:

– Александра бира природан број  $n \geq 2$ , а потом и рационалне бројеве  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1]$ ;  
– након тога Бојан бира природан број  $m \geq 2$ ,  $m \neq n$ , и рационалне бројеве  $b_1, b_2, \dots, b_m \in (0, 1]$ ;  
– након тога одређују вредности  $A = \sqrt[n]{a_1^2 + \dots + a_n^2}$  и  $B = \sqrt[m]{b_1^2 + \dots + b_m^2}$  и уколико је  $A$  већи, побеђује Александра, уколико је  $B$  већи побеђује Бојан, а уколико је  $A = B$ , игра се завршава нерешеним исходом.  
(а) Доказати да Александра има победничку стратегију.  
(б) Да ли Александра и Бојан могу одиграти игру тако да исход буде нерешен?

2. Нека је  $X$  тачка унутар  $\triangle ABC$  таква да је  $\angle CAX \neq \angle CAB$ . Нека су  $X_A, X_B$  и  $X_C$  подножја нормала из  $X$  на  $BC, CA$  и  $AB$ , редом. Нека су  $P$  и  $Q$  тачке такве да су  $X_AX_C P$  и  $X_B X_A Q$  паралелограми. Нека се  $BP$  и  $CQ$  секу у тачки  $Y$  и нека симетрала  $\angle BAC$  сече  $XY$  у тачки  $Z$ . Нека је  $Y_C$  подножје нормале из  $Y$  на  $AB$ . Доказати да је  $\frac{ZY}{ZX} = \frac{YY_C}{XX_B}$ .

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$x^{20} + 2^y = 2022^z.$$

4. Одредити све  $a \in \mathbb{R}$ , такве да за свако  $x \in \mathbb{R}$  важи

$$(x+1)(x^3 + ax^2 + x + (a-2)^2) \geq 0.$$

5. Нека су  $m$  и  $n$  природни бројеви. На столу се налазе две гомиле златника, на којима се налази по  $m$  и  $n$  златника, редом. Играчи  $A$  и  $B$  наизменично играју потезе, при чему играч  $A$  игра први потез. У сваком потезу играч са једне гомиле може узети неки број златника, тако да тај број делилац броја златника на другој гомили. Притом, сматра се да сваки природан број дели број 0. Победник је играч који узме последњи златник са стола. За које вредности  $m$  и  $n$  победничку стратегију има играч  $A$ , а за које играч  $B$ ?

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.