

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Други разред – Б категорија

1. Одредити колико има четвороцифрених бројева у чијем се декадном запису појављују само цифре 1, 2 и 3 (не обавезно све три), а тако да се највећа цифра не појављује више од два пута.
2. Нека је D тачка странице AB троугла ABC . Симетрале $\sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle CDB$ секу странице AC и BC у тачкама M и N , редом. Симетрале $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$ секу дужи DM и DN у тачкама K и L , редом. Доказати да је $CM = CN$ ако и само ако су MN и KL паралелне.
3. Нека је $z \neq -1$ комплексан број. Доказати да је $z = \frac{1+ir}{1-ir}$ за неко $r \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $|z| = 1$.
4. Одредити све $a \in \mathbb{R}$, такве да су
$$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = (4a+1)x^2 - 2(2a+1)x - 2$$
квадратне функције, при чему $f(x)$ има две различите реалне нуле и графици тих функција имају тачно једну заједничку тачку.
5. Нека је $n \geq 2$ природан број. Одредити последњу цифру броја $2^{2^n} + 1$ у декадном запису.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.