Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

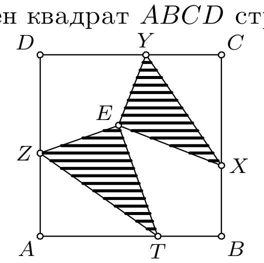
Трећи разред – А категорија

1. Нека је n природан, а p прост број, тако да важи $2n^2 = p^2 + 1$ и тако да је

$$m = \sqrt[5]{p + n\sqrt{2}} + \sqrt[5]{p - n\sqrt{2}}$$

природан број. Одредити могуће вредности броја m.

2. Једна страна листа папира је осенчена и из њега је исечен квадрат $ABCD$ странице 2. Уочене су тачке X, Y, Z и T, на страницама BC, CD, DA и AB, редом, и папир је пресавијен по дужи XY и по дужи ZT, при чему су се тим пресавијањем тачке A и C пресликале у исту тачку E, као на слици.



Доказати да је површина видљивог осенченог дела не мања од 1.

3. Нека су $m, n \in \mathbb{N}$. У поља таблице $m \times n$ уписане су нуле и јединице. Притом, за сваки скуп врста, број колона које у пресеку са сваком од њих имају само нуле једнак је броју колона које у пресеку са сваком од њих имају само јединице.

Доказати да се колоне те таблице могу поделити у парове тако да су колоне истог пара „супротне”: на местима на којима прва има нуле друга има јединице, а на местима на којима прва има јединице, друга има нуле.

4. Одредити све растуће геометријске низове, код којих је производ осмог и десетог члана једнак 1, а разлика седмог и шестог члана једнака 4.

5. Број је *овогодишњи* ако је његов декадни запис облика

$$2c_1 \dots c_k 0 c_{k+1} \dots c_{k+l} 2 c_{k+l+1} \dots c_{k+l+m} 2,$$

где су $k, l, m \in \mathbb{N}$, а c_i цифре у декадном запису, за свако $1 \leqslant i \leqslant k + l + m$. Колико има овогодишњих бројева који су потпуни степени? (Број n је потпун степен ако и само ако је $n = a^b$ за неке $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.