

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Други разред – А категорија

1. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ за које једначина

$$||x^2 - 5x + 6| - x| + 3 = 2022a$$

има тачно три решења у скупу реалних бројева.

2. Пешак се налази у првој колони и другом реду (поље А2) шаховске табле димензије 8×8 . На колико начина пешак може доћи до осмог реда, не рачунајући потезе других фигура, ако се у првом потезу није померио два поља? (Пешак се у сваком потезу помера са поља (x, y) на неко од поља $(x, y + 1)$, $(x - 1, y + 1)$ и $(x + 1, y + 1)$ (последња два у случају да поједе противничку фигуру).)
3. У једној школи постоје секције из математике, физике и рачунарства, а сваки ученик школе је члан барем једне секције и сваку секцију похађа барем један ученик. Нека је m просечан број секција које похађају ученици који су чланови секције за математику, f просечан број секција које похађају ученици који су чланови секције за физику, а r просечан број секција које похађају ученици који су чланови секције за рачунарство.
- Ако је $m = f = r = \alpha \in (1, 2)$, доказати да је просечан број секција које похађају ученици ове школе мањи од α .
4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао и нека су P и Q тачке на страницама AB и AD , редом, тако да је $AP = CD$ и $AQ = BC$. Нека је M тачка пресека правих AC и PQ . Доказати да је M средиште дужи PQ .
5. На табли је написан број 2022. После сваког минута брише се број x који је у том тренутку написан на табли и записује један од бројева $2x - 1$ или $3x + 1$. Да ли је могуће да у неком тренутку на табли буде написан број 2^{2022} ?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.