

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.05.2022.

Четврти разред – Б категорија

1. Све нуле полинома $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ су x_1, x_2, x_3 и различите су од 0. Одредити све $a, b, c \in \mathbb{R}$, тако да су

$$y_1 = x_1 + \frac{2}{x_2 x_3}, \quad y_2 = x_2 + \frac{2}{x_3 x_1} \quad \text{и} \quad y_3 = x_3 + \frac{2}{x_1 x_2}$$

све нуле полинома $q(x) = x^3 + cx^2 + ax + b$.

2. Нека је $A = \{1, 2, \dots, 74\}$ и $B = \{1, 2, \dots, 2022\}$. Одредити број парова функција (f, g) таквих да $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ и важи $g(f(x)) = 75 - x$ за свако $x \in A$.

3. Одредити све природне бројеве n за које вредност израза

$$\cos^n x + \cos^n\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^n\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

не зависи од x .

4. Одредити све природне бројеве k, m, n за које важи

$$7^k = 5^m + 2 \cdot 22^n.$$

5. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle CAB = 31^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 62^\circ$. Тачка X припада унутрашњости $\triangle ABC$ и важи $\sphericalangle XBC = 3^\circ$ и $\sphericalangle XCA = 29^\circ$. Ако је Y пресек правих CX и AB , доказати да је $AU = YX$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.