Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

12.03.2022.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати да се сви подскупови скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ могу поређати у низ, тако да за свака 2 узастопна члана тог низа важи да је један подскуп другог и да њихова разлика има тачно један елемент.

2. Које вредности може имати израз $a + b + c$, ако су a, b, c реални бројеви за које важи

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3?$$

3. Нека су a и b непарни природни бројеви и нека је низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан са $f_1 = a$, $f_2 = b$, а за $n \geqslant 3$ је f_n највећи непаран делилац броја $f_{n-2} + f_{n-1}$.

(а) Доказати да постоји $k \in \mathbb{N}$, такав да су сви чланови низа почев од неког једнаки k.

(б) У зависности од a и b, одредити k.

4. У унутрашњости $\triangle ABC$ у коме је $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 20^\circ$ уочена је тачка Q таква да је $\sphericalangle QCB = 3 \cdot \sphericalangle QBC$. Симетрале $\sphericalangle QBA$ и $\sphericalangle QCA$ секу се у тачки P, при чему је $\sphericalangle PAB = 20^\circ$. Доказати да су тачке A, P и Q колинеарне.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.