

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.05.2022.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[5]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[5]{\frac{x+3}{2(x-5)}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

2. Нека је  $ABCD$  тетиван четвороугао и нека су тачке  $B', B'', C', C''$ , редом, на полуправама  $AB, DB, AC, DC$  такве да је  $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$  и  $DB \cdot DB'' = DC \cdot DC''$ . Нека је  $O'$  пресек симетрала дужи  $BB'$  и  $CC'$ , а  $O''$  пресек симетрала дужи  $BB''$  и  $CC''$ . Ако је  $O' \neq O''$ , доказати да центар описаног круга четвороугла  $ABCD$  припада правој  $O'O''$ .
3. Одредити све  $n, a, b$ , где је  $n > 1$  природан број, а  $a$  и  $b$  цифре различите од 0, тако да постоји правоугли троугао чије су катете  $\underbrace{a \dots a}_n 0$  и  $\underbrace{b \dots b}_n$ , а хипотенуза  $\underbrace{a \dots a}_n b$ , где  $\underbrace{a \dots a}_n 0$  представља број који у декадном запису има  $n$  цифара, првих  $n-1$  једнаких  $a$ , а последња једнака 0,  $\underbrace{b \dots b}_n$  представља број који у декадном запису има  $n$  цифара једнаких  $b$ , а  $\underbrace{a \dots a}_n b$  представља број који у декадном запису има  $n$  цифара, првих  $n-1$  једнаких  $a$ , а последња једнака  $b$ .

4. У изразу

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10 \square 11 =$$

се у сваки „квадратић” уписује знак  $+$  или знак  $-$ , а након тога одређује вредност добијеног израза. Доказати да постоји вредност која се може добити барем 18 пута.

5. Доказати да једначина

$$(7 + \sqrt{48})^x + 17(2 - \sqrt{3})^x = 12$$

нема решења у скупу реалних бројева.

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.