

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.05.2022.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је  $m \in \mathbb{R}$  и нека су

$$\vec{a} = (2, m, 1), \quad \vec{b} = (m, -1, 2) \quad \text{и} \quad \vec{c} = (1, 1, -3)$$

вектори ивица које полазе из истог темена тростране пирамиде. Уколико постоји, одредити  $m$  за које је запремина те пирамиде најмања, као и висину која одговара основи одређеној векторима  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  пирамиде за коју се достиже минимална запремина.

2. Доказати да је број  $\frac{16 \arcsin \frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}{2}}{\pi}$  природан.
3. Нека је  $D$  тачка странице  $CA$  троугла  $ABC$ , тако да је  $CD = 2DA$ . Ако је  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBC = 45^\circ$ , израчунати  $\sphericalangle ABC$ .
4. Нека је  $S(n)$  збир цифара природног броја  $n$  у декадном запису. Да ли постоји прост број  $p$ , тако да је и број  $S(7^p + 5^p + 2022^p)$  прост?
5. Мишко има шест наизглед истих златника, али њихове масе су међусобно различите. Притом, међу златницима постоји тачно по један масе 1g, 2g, 3g, 4g, 5g и 6g, а сваки златник означен је једним бројем из  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , тако да је сваки број из тог скупа употребљен тачно једном. Број којим је златник означен треба да представља његову масу, али Мишко сумња да су неки златници погрешно означени. Он поседује теразије (теразије представљају направу која има два таса; стављајући одређене масе на тасове, помоћу теразија се може установити да ли је маса на једном тасу мања, једнака или већа од масе на другом тасу, али уколико те масе нису једнаке, помоћу теразија се не може утврдити колика је разлика између маса које се налазе на тасовима).

Међутим, Мишкове теразије су старе, па постоји могућност да ће се након два мерења покварити. Стога он жели да у највише два мерења утврди да ли међу златницима има погрешно означених (интересује га само податак да ли међу златницима има погрешно означених, а уколико такви постоје, није нужно да утврди и који су то златници). Може ли Мишко остварити своју намеру?

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.