

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

12.03.2022.

Други разред – А категорија

1. Нека је  $M$  средиште странице  $BC$  троугла  $ABC$ . Нека је  $X$  средиште лука  $AB$  који не садржи теме  $M$  описаног круга  $\triangle AMB$ , а  $Y$  средиште лука  $AC$  који не садржи теме  $M$  описаног круга  $\triangle AMC$ . Доказати да је  $XY \perp AM$ .
2. У  $\triangle ABC$  теменима  $A, B, C$ , редом, одговарају унутрашњи углови  $\alpha, \beta, \gamma$ , а наспрам њих су странице дужина  $a, b, c$ . Одредити све  $\triangle ABC$  за које важи

$$a^3 \cos \alpha + b^3 \cos \beta + c^3 \cos \gamma \leq abc.$$

За које  $\triangle ABC$  се у претходној неједнакости достиже једнакост?

3. Одредити све  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , такве да за свако  $n \in \mathbb{N}$  и све  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ , уколико је  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  потпун квадрат, онда је и  $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$  потпун квадрат.
4. У некој земљи постоји  $n$  градова и  $k$  авиопревозника, где је  $n, k \in \mathbb{N}$ . Између свака два града постоји двосмерна авиолинија, чији је власник тачно један авиопревозник. Сваки авиопревозник издаје неки број различитих часописа, тако да у сваком граду издаје тачно један, али може издавати исти часопис и у различитим градовима. Притом, уколико путник путује из града  $A$  у град  $B$  директном авиолинијом која је у власништву авиопревозника  $C$ , онда су часописи које издаје авиопревозник  $C$  у градовима  $A$  и  $B$  различити. Доказати да макар један авиопревозник мора издавати барем  $\lceil \sqrt[k]{n} \rceil$  различитих часописа, као и да постоји подела авиолинија по авиопревозницима, тако да ниједан не мора издавати више од  $\lceil \sqrt[k]{n} \rceil$  часописа. (За  $x \in \mathbb{R}$  је  $\lceil x \rceil$  најмањи цео број не мањи од броја  $x$ .)

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.