Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све могуће вредност реалног параметра $t \geqslant 0$ за које се решења једначине

$$x^3 - tx^2 - 16x - 4\sqrt{2t} = 0$$

могу означити са x_1, x_2 и x_3 тако да је x_1 позитиван реалан број и

$$x_2^2 x_3^2 = \sqrt{x_1^3} + (x_2 + x_3 + 9)\sqrt{x_1} - \frac{288}{x_1^2}.$$

2. Дато је неколико међусобно различитих црвених, плавих и белих корпи (бар по једна у свакој боји). Потребно је распоредити n различитих оловака у корпе. Ферма је бројао такве распореде у којима су бар по једна црвена и плава корпа непразне. С друге стране, Вајлс је бројао распореде у којима су све црвене и плаве корпе празне. Испоставило се да су Фермаов и Вајлсов резултат исти. Ако има тачно 2020 корпи у најзаступљенијој боји, колико укупно има корпи?

3. Наћи највећи реалан број α за који постоји низ непарних природних бројева $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \dots$ са следећим својством:

за свако n, a_n је највећи природан број строго мањи од $\alpha \cdot a_{n+1}$.

4. Наћи најмањи природан број k са следећим својством:

међу ма којих k целих бројева постоје различити бројеви a и b такви да је број

$$a^2 + 2ab - 3b^2 - 2a + 2b$$

дељив са 28.

5. Око кружнице полупречника r описан је четвороугао $ABCD$ у коме је $AB = 4$, $BC = 3$ и $CD = 2$. Доказати да је $1 < r \leqslant \sqrt{2}$.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.