

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Трећи разред – Б категорија

1. У једном реду биоскопа је 9 седишта. Треба означити 4 седишта на којима ће седење бити дозвољено, при чему правило дистанце налаже да два посетиоца не смеју да седе један до другог. На колико начина се то може учинити?

2. У зависности од реалног параметра a у скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$\begin{cases} \ln x + \ln y^2 + \ln z^3 = 0 \\ \ln x^2 + \ln y^3 + \ln z = a \\ \ln x^3 + \ln y^5 + a \ln z = 2a - 4. \end{cases}$$

3. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\cos^{2020} x + \sin^{2021} x + \cos^{2022} x \leq 2.$$

4. Дат је једнакостраничан троугао ABC странице 1. Тачка D на страници BC је таква да је $BD = \frac{2}{3}$, а тачка E на страници AC таква да је $\sphericalangle ADE = 30^\circ$. Израчунати дужину дужи AE .

5. Одредити све парове природних бројева (x, y) такве да је

$$x^2 - 4y^2 = x - 2y + 2^{2021}.$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.