

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Трећи разред – А категорија

1. У трапезу $ABCD$ ($AB \parallel CD$) дијагонале AC и BD секу се у тачки E , а праве AD и BC у тачки F . Тачка $G \neq E$ је одабрана на кружници BCE тако да је $EG \parallel AD$. Доказати да је $\sphericalangle AFG = \sphericalangle BFE$.
2. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева $x = \overline{a_k \dots a_1}$ (где је $a_k \neq 0$) таквих да бројеви x и x^2 имају исти k -тоцифрени завршетак.
3. Скуп $\{1, 2, \dots, 49, 51, 52, \dots, 99\}$ треба поделити у неуређене парове тако да се у сваком пару елементи разликују за 24 или 25. Колико има таквих подела?
4. Дат је прост број p облика $4k+3$. Нека су a и x цели бројеви који нису дељиви са p такви да важи $a \equiv x^2 \pmod{p}$. Доказати да постоји цео број b такав да важи $a \equiv b^4 \pmod{p}$.
5. Колико има комплексних бројева z за које важи једнакост

$$|z^{2020} - 1| = |z^{2021} - 1| ?$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.