

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Други разред – А категорија

1. Наћи све парове реалних бројева  $(x, y)$  таквих да је  $x \geq y \geq 1$  и

$$2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0.$$

2. У паралелограму  $ABCD$  са оштрим углом у темену  $A$ , подножја нормала из темена  $C$  на праве  $AB$ ,  $BD$  и  $AD$  су редом  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Доказати да пресек дијагонала паралелограма  $O$  лежи на описаној кружници троугла  $PQR$ .

3. Скуп  $X$  има 11 елемената. Подскупови  $A_1, A_2, \dots, A_n$  скупа  $X$  су такви да важи:

(i)  $4 \leq |A_i| \leq 10$  за свако  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

(ii) за свака три елемента скупа  $X$  постоји јединствен скуп  $A_i$  коме они припадају.

Доказати да за бар једно  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) важи  $|A_i| = 7$ .

4. Одредити све природне бројеве  $n \geq 2$  за које једначина

$$(2 + \cos x)(3 + \cos x) \cdots (n + \cos x) = (1 + \cos^2 x)(1 + \cos^3 x) \cdots (1 + \cos^n x)$$

има бар једно реално решење.

5. Означимо са  $S_3(x)$  збир цифара природног броја  $x$  када се он запише у бројевном систему са основом 3 (нпр.  $11 = (102)_3$ , па је  $S_3(11) = 1 + 0 + 2 = 3$ ). Доказати да за сваки природан број  $n$  међу бројевима

$$S_3(2^n), S_3(2^{n+1}), S_3(2^{n+2}), \dots, S_3(2^{3n})$$

постоје два једнака.

Време за рад: 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Сваки задатак вреди 20 бодова.