Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Четврти разред – А категорија

1. Скуп природних бројева S има својство да се сваки природан број може представити као збир неколико (један или више) различитих бројева из S. За $x \in \mathbb{N}$, са $f(x)$ означавамо највећи могући број сабирака у таквом представљању броја x.

Доказати да за свако $a \in S$ постоји бесконачно много природних бројева x за које је $f(x+a) = f(x) + 1$.

2. Низ (a_n) је задат условима

$$a_1 = 4 \quad \text{и} \quad a_n = \frac{4n^2 a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 4n^2 - 2} \quad \text{за} \quad n \geqslant 2.$$

Израчунати a_{2020} (у експлицитном облику).

3. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ACB$. Његов уписани круг има центар I и додирује страницу AC у тачки D. Права AI поново сече описану кружницу троугла ABC у тачки M. Тачка K на страници AC је таква да је $IK \parallel BC$, а права MK сече страницу BC у тачки L. Доказати да нормала из тачке D на праву MC полови дуж KL.

4. Знајући да важи

$$53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = \overline{22{*}\,6{*}3\,493\,6{*}9\,{*}96\,8{*}4\,{*}10\,6{*}4\,{***}\,{***}},$$

одредити цифре означене звездицом.

(Са $n!!$ је означен *двоструки факторијел*: $n!! = n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots$)

5. Низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ је такав да је

$$a_i = |a_{i-1} - a_{i-2}| \ \text{ за свако } \ i \geqslant 3 \quad \text{и} \quad a_i \leqslant 2020 \ \text{ за } \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Наћи највећу могућу дужину овог низа.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.