

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Трећи разред – Б категорија

1. У правилној четвоространој пирамиди $SABCD$ бочна страна SAB заклапа са основом $ABCD$ угао од 60° . Израчунати косинус угла између бочних страна SAB и SBC .
2. Посматрајмо све троцифрене бројеве чије су све цифре у скупу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (не обавезно различите; прва цифра не може бити нула). Да ли међу овим бројевима има више оних дељивих са 3 или оних дељивих са 5?
3. Дат је квадрат $ABCD$ стране a и кружница k са центром у центру квадрата O и полупречником r . Нека је P произвољна тачка на кружници k . Доказати да је вредност израза

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

константна, тј. да не зависи од избора тачке P на кружници.

4. Дат је природан број n . Одредити све реалне бројеве x такве да за сваку пермутацију (a, b, c, d) бројева $n, n + 1, n + 2, n + 3$ важи

$$\sin ax \cdot \sin bx = \sin cx \cdot \sin dx.$$

5. Означимо са $S(n)$ збир цифара природног броја n . Решити једначину

$$n \cdot S(n) = 2020 + n.$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.