

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC је $AB = 17$ и $AC = 14$, а тачке D , E и F на страницама BC , CA и AB редом су такве да је

$$BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 2.$$

Ако тачке A , D , E и F леже на истом кругу, наћи дужину странице BC .

2. Решити систем једначина у скупу комплексних бројева:

$$\begin{cases} |z|^2 + zw + \bar{w} = 2 + 6i \\ |w|^2 + \bar{z}w + z = 2 - 4i. \end{cases}$$

3. Наћи све бројевне системе у којима је број 3806130 четвороцифрен палиндром.
(Палиндром је број или низ карактера који се исто чита унапред и уназад.)

4. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f(f(x) + f(y)) = xf(f(y))f(x + y).$$

5. Да ли постоје два дисјунктна скупа целих бројева, сваки са бар три елемента, таква да:
- (а) за свака два различита броја a и b из истог скупа постоји број c из другог скупа такав да је $2c \in \{a+b, a+b+1\}$?
 - (б) за свака два различита броја a и b из истог скупа постоји број c из другог скупа такав да је $2c \in \{a+b, a+b+2\}$?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.