

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Други разред – А категорија

1. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева дељивих са 11 код којих је збир цифара једнак производу цифара.

2. Реални бројеви  $a, b, c$  и  $d$  су такви да важи

$$a + b + c + d = 5 \quad \text{и} \quad (a + b)(c + d) + (a + c)(b + d) + (a + d)(b + c) = 15.$$

Доказати да је бар један од бројева  $a, b, c, d$  мањи од 1.

3. Кружница  $\gamma$  додирује изнутра кружницу  $\Gamma$  у тачки  $X$ . Права  $\ell$  сече кружницу  $\Gamma$  у тачкама  $A$  и  $D$ , а кружницу  $\gamma$  у тачкама  $B$  и  $C$ , при чему је тачка  $B$  између  $A$  и  $C$ . Доказати да је

$$\frac{XA^2}{XD^2} = \frac{AB \cdot AC}{DB \cdot DC}.$$

4. Нека су  $m$  и  $n$  природни бројеви. У свако поље квадратне табле  $n \times n$  уписан је по један цео број.  $P_{ij}$  је низ међусобно различитих поља у коме је прво поље у првој врсти, последње у  $n$ -тој, и свака два узастопна поља имају заједничку страницу. Доказати да:

- (а) ако је  $m \leq n$ , увек постоји пут у коме је збир уписаних бројева дељив са  $m$ ;  
(б) ако је  $m > n$ , такав пут не мора да постоји.

5. Дато је неколико тачака у равни, при чему никоје три нису колинеарне. Нацртано је неколико дужи са крајевима у датим тачкама тако да је свака тачка теме највише четири дужи. Доказати да се свака дуж може обојити једном од две боје тако да никоје три дате тачке нису темена једнобојног троугла.

Време за рад: 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.  
Сваки задатак вреди 20 бодова.