

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Први разред – А категорија

1. Релацију \diamond на скупу \mathbb{R} дефинишемо на следећи начин:

$$x \diamond y \quad \text{ако и само ако је} \quad |x - 1| + |y - 2| \leqslant 1.$$

Ако је $x \diamond (y - x)$ и $x \diamond (y + x)$, одредити y .

2. Природни бројеви су обојени у две боје с периодом d (тј. бројеви x и $x + d$ увек имају исту боју). Претпоставимо да постоје природни бројеви a, b и c такви да је, за свако $x \in \mathbb{N}$, тачно један од бројева $x + a, x + b$ и $x + c$ првен. Доказати да је d дељиво са 3.
3. Наћи све тачке X унутар квадрата $ABCD$ за које важи

$$AX + CX = BX + DX.$$

4. Скуп од 2020 узастопних природних бројева подељен је на два подскупа од по 1010 бројева. Може ли најмањи заједнички садржалац свих бројева у првом скупу бити једнак најмањем заједничком садржаоцу свих бројева у другом скупу?
5. Одредити најмању могућу вредност израза

$$F = \max\{x, 1 - y\} + \max\{y, 2 - z\} + \max\{z, 3 - x\},$$

где су x, y и z реални бројеви. Наћи све тројке (x, y, z) за које се та вредност достиже.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.